763. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markov 過程 (1)

吉田　耕作（阪大）

n個ノ点$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ガ或確率ノ法則ニ従ッテ互ニ遷移スルトスル。点$x_i$ガ単位時間ノ後ニ点$x_j$ニ移ル確率ヲ$p_{ij}$トスレバ

$$(1)\quad p_{ij} \geqq 0 \quad 且 \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad (i=1,2,\ldots\ldots,n)$$

デアル。今コノ法則ニ次ノ假定ヲ設ケル。即チ i) p_{ij} ハ運動点ガ x_i ニ來ル前ニ何処ニアッタカト云フコトニ無關係デアリ又 ii) p_{ij} ハ時間ノ經過ニモ無關係デアルトスルノデアル。斯ル確率運動ヲ homogeneous[1] ナ Markov 過程ト呼ブ。コノ時点 x_i ガ m 單位時間ノ後ニ点 x_j ニ移ル確率 $p_{ij}^{(m)}$ ハ

$$(2)\qquad p_{ij}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,p_{kj}^{(m-1)} \qquad\qquad (p_{ij}^{(1)}=p_{ij})$$

ニヨッテ與ヘラレル譯デアル。

n＝有限ナ場合ニハ此ノ過程ノ $m\longrightarrow\infty$ ニ於ケル漸近的ナ性質ハ相當精シク研究サレテヰル。n＝有限ダカラ遷移確率行列 $\mathrm{P}=\|p_{ij}\|$ ガ完全連続ナ線型作用素ニナルト云フコトガ利イテ來ル譯デアリマス[2]。

最近 A. Kolmogoroff[3] ハ $n=+\infty$ ノ場合ヲ研究シテ相當精シイコトヲ出シテヲリマス。intrinsic ナ條件 (1) 以外ニ何モ假定セズニ取扱ッテヰルコトハ注目ニ値シマス。殘念ナコトニハ上ノ論文ハ証明ノ（寧ロ結果ノ）荒筋シカ述ベテナイノデ之ヲ辿レマセン。此ノ頃 Kolmogoroff ハ

---

(1) 空間ニ對シテモ時間ニ對シテモ homogeneous

(2) 筆者談話716 "確率論ヘノ積分方程式ノ應用" §9ヲ参照セラレタシ。

(3) Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen: Rec. Math. 43, 4 (1936), p.606

精シイ証明ヲ出シマシタガ何分露西亜語ナノデ歯ガ立チマセン。ソコデ色々考ヘテミタラ直接証明出來ル様デスカラ之ヲ述ベテミマセウ。[1]

角谷君ハ mean sojourn ノ存在丈ナラバ Birkhoff ノ ergodic theorem ニ reduce シテ証明出來ルコトヲ注意サレマシタ。尚角谷君ガ熱心ニ discussion シテ下サッタコトヲ感謝致シマス。

§1. Mean sojourn ノ存在

先ヅ (1), (2) ヨリ全テノ n ニ對シテ

$$(3) \quad p_{ij}^{(n)} \geqq 0 \qquad 且ツ \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$$

$$(i,\ j = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ハ明カ。 $q_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$ トヲク。

$\boxed{定理 1}$ 全テノ i, j ニ對シ <u>mean sojourn</u> $\lim\limits_{n\to\infty} q_{ij}^{(n)} = K_{ij}$ ガ存在シ

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \leqq 1$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} K_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik} K_{kj} = K_{ij}$$

証明： 任意ノ正整数列 $\{n\}$ カラ適當ニ部分列 $\{n'\}$

(1) Continuous case ニ於ケル W. Doeblin ノ結果ノ積分方程式取扱ヒ(拿者談話 No.46) ト比較シテ頂キタイ。

ヲ撰ベバ $\lim_{n'\to\infty} q_{ij}^{(n')} = p_{ij}^{(\infty)}$ ガ全テノ i, j ニ對シテ存在シ且ツ $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(\infty)} \leqq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$. コレハ (3) 及ビ對角線論法デ得ラレル。コノ $p_{ij}^{(\infty)}$ ニ對シ

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)} \qquad (m = 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj}^{(m)} = p_{ij}^{(\infty)} \qquad (m = 1, 2, \cdots\cdots, +\infty)$$

ガ成立ツ。先ヅ

<u>(6) ノ証</u> $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} q_{kj}^{(n')} - q_{ij}^{(n')} = \frac{1}{n'}\left\{ p_{ij}^{(n'+1)} - p_{ij} \right\} \to 0$

as $n' \to \infty$ カラ $\lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} q_{kj}^{(n')} = p_{ij}^{(\infty)}$. 所ガ $\sum_{k=1}^{\infty} |p_{ik}| = 1$ 及ビ $0 \leqq q_{kj}^{(n')} \leqq 1$ カラ明カニ

$$\lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} q_{kj}^{(n')} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} \left(\lim_{n'\to\infty} q_{kj}^{(n')} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} p_{kj}^{(\infty)}.$$

<u>(7) ノ証</u> 上ト同様ニシテ $\lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}^{(n')} p_{kj} = p_{ij}^{(\infty)}$.

p, q 全テ $\geqq 0$ ダカラ任意ノ $t < +\infty$ ニ對シテ

$$\lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{t} q_{ik}^{(n')} p_{kj} = \sum_{k=1}^{t} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj} \leqq p_{ij}^{(\infty)}.$$ 從ッテ

$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj} \leqq p_{ij}^{(\infty)}$. 此ノ最後ノ式ニ於テ或 i, j ニ對

シ實際＝不等式ガ成立ツトスレバ，両辺ヲjニツキ sum シ

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)}\left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{kj}\right) < \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(\infty)}$$ ヲ得テ（3）ニ矛盾スル。

斯クテ（7）ハ $m=1,2,\cdots\cdots$ ノトキ証明サレタ。之ヨリ

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} q_{kj}^{(n')} = p_{ij}^{(\infty)}.$$ 故ニ $n' \to \infty$ ナラシメ（6）ノト

キト同ジ様ニシテ $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)}$ ヲ得ル。

背 $\{n'\}$ ト相異ル $\{n''\}$ ニ對シテ $r_{ij}^{(\infty)} = \lim_{n''\to\infty} q_{ij}^{(n'')}$ ガ

得ラレタトスル。コノトキ全テノ i, j ニ對シテ $r_{ij}^{(\infty)} \geqq p_{ij}^{(\infty)}$

ガ成立ツコトガ云ヘレバ定理ノ証明ハ終ル訳ニナル。議論ガ

r, p ニ對シテ symmetric ダカラ

所ガ $m=\infty$ ニ於ケル（7）ヲ得タト同様ニシテ

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} r_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)}. \quad \text{又} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} r_{kj}^{(\infty)} = r_{ij}^{(\infty)}$$

（（6））カラ $$\sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}^{(n')} r_{kj}^{(\infty)} = r_{ij}^{(\infty)}.$$ r, q 全テ $\geqq 0$

ダカラ任意ノ t ニ對シ，

$$r_{ij}^{(\infty)} = \lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}^{(n')} r_{kj}^{(\infty)} \geqq \lim_{n'\to\infty} \sum_{k=1}^{t} q_{ik}^{(n')} r_{kj}^{(\infty)} = \sum_{k=1}^{t} p_{ik}^{(\infty)} r_{kj}^{(\infty)}.$$

従ツテ $r_{ij}^{(\infty)} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} r_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)}$ ヲ得ル。　—以上—

§2. 定理１ノ應用

$\boxed{Lemma\ 1}$　i ヲ興ヘタトキ $K_{ij}>0$ ナル如キ x_j ノ集合ヲ A_i トスレバ，$x_k \in A_i$ ノトキ

$$(8)\quad \sum_{x_j \in A_i} p_{kj}^{(m)} = \sum_{x_j \in A_i} K_{kj} = 1 \qquad (m=1, 2, \cdots\cdots)$$

証明．　(5) ヨリ $\sum_{x_k \in A_i} K_{ik}\left(\sum_{x_j \in A_i} p_{kj}^{(m)}\right) = \sum_{x_j \in A_i} K_{ij}$．

然シテ $0 \leqq \sum_{x_j \in A_i} p_{kj}^{(m)} \leqq 1$ ダカラ (8) ヲ得ル（但シ $p_{kj}^{(\infty)} = K_{kj}$ トスル。　——以上——

今一般ニ $p_{st}^{(m)} > 0$ ナル如キ m ノ存在スルトキ $x_s \longrightarrow x_t$ ト書ク。

$\boxed{A_i\ ノ分解}$　$A_i = \sum_\alpha A_i^{(\alpha)}$ ト可附番個ニ分解シ

i)　$x \in A_i$，$y \bar{\in} A_i$ ナラ $x \not\rightarrow y$

ii)　$x \in A_i^{(\alpha)}$，$y \in A_i^{(\beta)}$ ナラ $x \not\rightarrow y$

iii)　$x_t, x_s \in A_i^{(\alpha)}$ ナラ $x_t \longrightarrow x_s$ 且ツ全テノ m（$m=\infty$ デモ）ニ對シ $\sum_{x_s \in A_i^{(\alpha)}} p_{ts}^{(m)} = 1$

証明：　i) ハ (8) ヨリ明カ．任意ノ $x_s \in A_i$ ニ對シテ $z \in A_i$ が存在シ $z \longrightarrow x_s$．何者，$\sum_{x_j \in A_i} K_{ij} \cdot p_{js} = K_{is} > 0$ カラ明カ。今 $x_t \longrightarrow x_s$ トシ，且ツ $x_t \to y$ ナル如キ y ノ集合ヲ A_{it} トヲケバ上カラ $x_s \in A_{it} \subset A_i$．コノ A_{it} が x_s ヲ含ム或ル $A_i^{(\alpha)}$ デアル。

以下其証明： $A_i - A_{it} = B$ トヲク，$x \in A_{it}$, $y \in B$ ナラ $x \to y$ デアルガ逆ニ $y \to x$ ノ成立ツコト即チ A_i ガ $A_{it} + B$ ト<u>完全ニ分解</u>スルコトガワカル。何者，$x_l \in B$ トスレバ $\sum_{x_j \in B} K_{ij} p_{jl} = K_{il}$，従ッテ $\sum_{x_j \in B} K_{ij} \left(\sum_{x_l \in B} p_{jl} \right) = \sum_{x_l \in B} K_{il}$．所ガ $0 \leqq \sum_{x_l \in B} p_{jl} \leqq 1$ ダカラ $\sum_{x_l \in B} p_{jl} = 1$ $(x_j \in B)$ トナラナケレバナラヌカラ． 次ニ $x_l \in A_{it}$ トシ $x_l \to y$ ナル如キ y 全体ノ集合ヲ A_{itl} トスルト $A_{itl} \subseteq A_{it}$ デアルガ $A_{itl} = A_{it}$ トナラナケレバナラヌ。若シ然ラズトスレバ，上ト同様ニシテ，A_{it} ガ完全ニ分解スルコトニナッテ矛盾ダカラ、即チ任意ノ $x_s \in A_i$ ハ或ル $A_{it} \subseteq A_i$ ニ含マレ且ツ A_{it} ハ全テノ $x_l \in A_{it}$ ニ對シ $A_{itl} = A_{it}$．之レト (8) カラ A_{it} ガアル $A_i^{(\alpha)}$ ニナルコトガ分ッタ。

—— 以上 ——

上ノ如クニシテ得ラレル $A_i^{(\alpha)}$ ノ如キモノヲ <u>*final set*</u> ト呼ブ。

$\boxed{\textit{final set} \text{ ノ性質}}$ E_α ヲ *final set* トスル。

$x_k \in E_\alpha$ ナラ $\sum_{x_j \in E_\alpha} p_{kj}^{(m)} = 1$ $(m = 1, 2, \cdots\cdots, +\infty)$ ヌ

$x, y \in E_\alpha$ ナラ $x \longrightarrow y$,

x_i カラ出発シテ A_i ヲ定義シ之カラ *final sets* $A_i^{(\alpha)}$ ガ得ラレタ。x_i ノトリ方ニヨッテ色々ナ *final sets* ガ得ラレルガ，上ノ性質カラ二ツノ *final sets* ハ全ク一致

スルカ全ク離レテヲル。故ニ $R=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$ ハ高々可附番個ノ *final sets* E_α ト残リノ D トニ分レル；

$$R=\sum_\alpha E_\alpha + D.$$

D ヲ *dissipative set* ト呼ブ。

$\boxed{D\text{ノ性質}}$ D ハモハヤ *final sets* ヲ含マスカラ $x_j \in D$ ナラバ，任意ノ x_i ニ對シテ $K_{ij}=0$.

§3. *Lemma* 2 及ビ其應用

$R=S+T$（S モ T モ空集合デナイ）ト適當ニ分レバ，$x \nrightarrow y$ if $x\in S$, $y\in T$ トナルトキ R ヲ <u>*reducible*</u> ト呼ブ。然ラザルトキハ *irreducible*.

$\boxed{\textit{Lemma 2}}$ R ガ *irreducible* ナラバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i p_{ij} = \xi_j \quad (j=1,2,\cdots\cdots). \qquad 0<\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|<+\infty$$

ナル如キ實數 ξ ハ全テ $\geqq 0$ 又ハ全テ $\leqq 0$

證明：$\xi_i>0$ ナル i ノ集合ヲ P，$\xi_i<0$ ナル i ノ集合ヲ N トシ，各々空集合ナラズトシテ矛盾ヲ出ス、即チ

$$\sum_{i\in P}\xi_i\Bigl(\sum_{j\in P}p_{ij}\Bigr)+\sum_{i\in N}\xi_i\Bigl(\sum_{j\in P}p_{ij}\Bigr)=\sum_{j\in P}\xi_j \text{ 及 } 0\leqq\sum_{j\in P}p_{ij}\leqq 1$$

カラ

$$\sum_{j\in P}p_{ij}=1 \text{ for } i\in P, \quad \sum_{j\in P}p_{ij}=0 \text{ for } i\in N$$

之ハ R ノ *irreducibility* ニ反スル。 ——以上——

$\boxed{\textit{final set ノ ergodicity}}$ E_α ヲ final set トスル. final set ノ性質ト (5) = ヨリ, $x_i \in E_\alpha$ ナラバ

$$\sum_{x_j \in E_\alpha} K_{ij} = 1, \quad \sum_{x_j \in E_\alpha} K_{ij} p_{jk} = K_{ik} \quad \text{for } x_k \in E_\alpha.$$

final set ハ明カニ irreducible ダカラ Lemma 2 = ヨリ, K_{ij} ($x_j \in E_\alpha$) ハ i ($x_i \in E_\alpha$) ニ無関係デナケレバナラヌ。即チ $K_{ij} = K_j$.

$\boxed{\textit{dissipative set ヨリ final set ヘ}}$ $x_i \in D$, $x_j \in E_\alpha$ トスル。

$K_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik} K_{kj}$ ハ D ノ性質及ビ final set ノ性質ヨリ

$K_{ij} = \sum_{x_k \in E_\alpha} K_{ik} K_{kj}$ ト書ケル訳デアルカラ,

$$K_{ij} = K_j \sum_{x_k \in E_\alpha} K_{ik}$$

<u>此次ニハ final set ノ中ノ運動ヲ調ベヤウ</u>.